

混合谱梯度方法及其在医学图像弹性配准中的应用*

韩 乐¹, 喻高航², 关履泰³

- (1. 华南理工大学数学系, 广东 广州 510640;
2. 赣南师范学院数学与计算机科学学院, 江西 赣州 341000;
3. 中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘 要: 大规模优化问题一直是理论研究领域的研究重点, 求解无约束最优化问题的混合谱梯度方法将多元谱梯度方法和谱梯度方法有效地结合在一起, 综合了二者的优势, 引入非单调线搜索后, 形成了全局收敛的混合谱梯度算法, 并用于医学图像弹性配准 B 样条参数模型的求解。医学图像弹性配准是医学图像处理研究的热点和难点, 其中的参数模型往往转化为无约束优化问题的求解, 当参数数目较大时传统的方法求解费时, 而混合谱梯度算法较多地利用梯度信息, 避免了梯度计算的浪费, 与层次 B 样条结合可以极大地提高参数配准的优化速度和精度, 算法中的非单调线搜索还有助于避免局部最优。

关键词: 弹性配准; B 样条; 谱梯度方法

中图分类号: O224; O241.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 03-0008-06

Multivariate Barzilai-Borwein Method and Its Application in Elastic Registration of Medical Image

HAN Le¹, YU Gaohang², GUAN Lütai³

- (1. Department of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, China;
3. Department of Scientific Computation and Computer Applications, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Combined with the advantages of multivariate spectral gradient method and spectral gradient method, multivariate Barzilai-Borwein method is proposed for unconstrained optimization. Moreover, based on a nonmonotone line search, global convergence is established for multivariate Barzilai-Borwein algorithm, and the algorithm is applied the B-spline parametric models in medical image elastic registration. The parametric models are often transformed into unconstrained optimization problem on image of multi-parameter, but the traditional methods are time-consuming for the problem with a large number of parameters. Multivariate Barzilai-Borwein algorithm utilizes more gradient information and greatly enhances the speed and precision of optimization in image registration, at the same time multi-resolution B-splines and the nonmonotone line search contribute to avoid local optimal.

Key words: elastic registration; B-spline; spectral gradient method

大规模优化问题不仅出现在经济学、社会学、工程学、管理学等应用领域, 也是理论研究领域的研究重点。构造大规模优化问题的计算方法, 研究

这些方法的理论性质和实际计算表现, 具有重要的理论意义和实际应用价值。求解无约束最优化问题的多元谱梯度方法^[1]沿搜索方向的每一个坐标分

* 收稿日期: 2008-07-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10572154); 教育部博士点新教师基金资助项目 (200805581022)

作者简介: 韩乐 (1977 年生), 女, 讲师; E-mail: hanle@scut.edu.cn

量方向选取步长,具有二次终止性,对具有对角 Hessian 矩阵的正定二次函数至多两步收敛,对具有正定对角 Hessian 矩阵的目标函数有二阶收敛速度,和非单调线搜索结合后,可以得到全局收敛的多元谱梯度算法,但数值实验显示多元谱梯度算法对某些目标函数有时收敛的很慢。为了克服这个缺点,我们提出了混合谱梯度方法,它将多元谱梯度方法和谱梯度方法^[2]有效地结合在一起,综合了二者的优势。同时,将非单调线搜索引入混合谱梯度方法后,我们又提出了全局收敛的混合谱梯度算法,并用于求解医学图像弹性配准 B 样条参数模型,从优化计算的角度改进了一类弹性配准模型的计算效率,提高了求解的速度和精度,其中的非单调线搜索还有助于避免局部最优。

医学图像配准一直是医学图像处理研究的热点和难点,其中弹性配准方法^[3-4]的研究仍不成熟,如何建立合理的变形模型,适合各种复杂的组织变形,如何提高弹性配准的计算速度、配准精度以及对弹性配准的评估都需要进一步的研究。已有的弹性配准方法可以分为参数模型与非参数模型,我们主要讨论参数模型,即将图像的弹性配准过程看作是一个多参数最优化问题。首先根据具体的配准问题确定一个衡量是否配准或配准程度的准则,然后根据配准准则定义一个适当的目标函数,最后通过对目标函数的最优化搜索得到配准参数。所以,弹性配准的参数模型最终都可以转化为求解无约束优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1)$$

其中, x 为待定的参数, n 为参数个数, $f(\cdot)$ 为匹配测度。

近几年,出现了用三次 B 样条函数描述局部^[5]和全局^[6]弹性形变的医学图像配准模型,较好地刻画了图像间的弹性变形。这一模型多以三次 B 样条的控制点坐标为待定参数,以灰度差平方和或归一化互信息为匹配测度,适用于同模态或多模态医学图像间的配准。当控制点数目较少时 B 样条描述的形变接近于刚性变换,反之则接近于非刚性变换。与薄板样条、弹性体样条相比, B 样条具有局部支撑性的特点,改变某一控制点只影响到相邻有限个控制点,当控制点数目较多时可以有效减少计算量。文献 [5] 用仿射变换描述待配准图像间的全局变换,用三次 B 样条描述待配准图像间的局部变换,将归一化互信息作为匹配测度,实现了 3D 医学图像的配准。文献 [6] 则以灰度差平方和为匹配测度,将参与配准的图像和弹性形变模

型都采用 B 样条模型进行描述,并给出了对应的快速算法。在比较了带精确、非精确单调线搜索的最速下降法,共轭梯度法及 ML 方法在求解速度与精度方面的优劣后,选取了用二次函数估计步长的最速下降法作为优化方法。文献 [7] 提出了针对 B 样条弹性形变模型的“分块计算,部分更新”的快速计算策略,减少了文献 [5] 采用方法的计算量,但损失了一定的配准精度。

B 样条弹性形变模型虽然可以采用分层逼近的方法避免局部最优,但每层的无约束优化问题的求解多采用最速下降法,每步迭代只利用一次当前迭代点处的梯度信息。然而,梯度计算受图像分辨率的影响很大,分辨率越高,计算量越大,求解时间越久,所以,对于高精度的医学图像,费时计算的梯度只用一次即丢弃的做法是不可取的。另外,文献 [6] 用到的精确线搜索也是非常耗时的,近期的优化研究表明,非单调线搜索可以帮助跳出局部最优,要比单调线搜索算法更有效^[8-10]。

1 混合谱梯度方法

考虑求解无约束优化问题 (1), 假定 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 连续可微, $f(x)$ 在点 x_k 处的梯度记为 g_k 。混合谱梯度方法的主要思想是: 初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和初始步长 $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$ 均为任意的, 迭代点 x_1 由最速下降法给出, 第 k 步迭代时, 先求解

$$\min_{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n} \|\text{diag}\{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n\} s_{k-1} - y_{k-1}\|_2 \quad (2)$$

得到 $\lambda_k^i, i = 1, \dots, n$ 。(2) 中的 $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}, y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$ 。如果 $\lambda_k^i > 0, i = 1, \dots, n$, 则令

$$x_{k+1} = x_k - \text{diag}\{1/\lambda_k^1, 1/\lambda_k^2, \dots, 1/\lambda_k^n\} g_k \quad (3)$$

否则, 令

$$x_{k+1} = x_k - \frac{s_{k-1}^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T y_{k-1}} g_k \quad (4)$$

迭代至终。实际上, (3) 是多元谱梯度方法的迭代格式, 而 (4) 是谱梯度方法的迭代格式, 所以, 将此方法称为混合谱梯度方法。

定理 1 混合谱梯度方法具有二次终止性。

证明 既然所有的正定二次函数均可以转化为

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x \quad (5)$$

其中 A 为正定对角阵, 所以只需对 (5) 的形式加以证明。

任意给定初始点 x_0 和迭代初始步长 $\alpha_0 > 0$, 得到 $x_1 = x_0 - \alpha_0 g_0$ 和 $s_0 = x_1 - x_0$ 。若 $s_0 = 0$, 由 $\alpha_0 > 0$ 可知 $g_0 = 0$, 迭代终止。

若 s_0 的每个分量均不为 0, 记 $\text{diag}\{\lambda_k^1, \lambda_k^2, \dots, \lambda_k^n\}$ 为 A_k , 极小化 $\|As_0 - y_0\|_2$ 得到 $A_1 s_0 = y_0$ 。因为 $y_0 = As_0$ 且 A 为正定对角阵, 所以 s_0 与 y_0 对应分量的符号相同, 故 A_1 的每个分量均大于零。若 s_0 的第 i 个分量 $(s_0)_i = 0$, $(A_1)_{ii}$ 可取任意值, 这时令 $(A_1)_{ii} = A_{ii}$ 。若 s_0 不止一个分量的值为零, 也做类似的处理。

注意到 $y_0 = As_0$, 可以得到 $A_1 = A$ 。因此

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - A_1^{-1} g_1 = x_1 - A^{-1} g_1 = \\ x_1 - A^{-1} A x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

所以混合谱梯度方法对正定二次函数有限步终止, 即具有二次终止性。

下面给出混合谱梯度算法。(2) 的解取作

$$\lambda_k^i = \begin{cases} \frac{(y_{k-1})_i}{(s_{k-1})_i} & (s_{k-1})_i \neq 0 \\ \frac{s_{k-1}^T y_{k-1}}{s_{k-1}^T k - 1 s_{k-1}} & (s_{k-1})_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

其中, $(s_{k-1})_i$ 表示 s_{k-1} 的第 i 个分量, $(y_{k-1})_i$ 表示 y_{k-1} 的第 i 个分量。为了保证算法的全局收敛性, 混合谱梯度算法采用了文献 [1] 中的非单调线搜索方法和一些限制。记 $z_k = -\text{diag}\{1/\lambda_k^1, 1/\lambda_k^2, \dots, 1/\lambda_k^n\} g_k$ 。

混合谱梯度算法

给定数据: $x_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma \in (0, 1), \delta > 0, 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1, 0 < \varepsilon < 1$ 以及整数 $M \geq 0$ 。

初始化: 令 $\alpha_0 = 1/\|g_0\|$, Condition = True 以及 $k := 0$ 。

While $\|g_k\| > 0$ do

Step 1.

If $k = 0$ then

令 $x_1 = x_0 - \alpha_0 g_0$, 跳转至 Step 5.

Else if Condition = True

判断 $\frac{(y_{k-1})_i}{(s_{k-1})_i}, i = 1, \dots, n$ 的符号, 如果存在负值,

令 Condition = False.

End if

If Condition = True then

令 $\lambda_k^i, i = 1, \dots, n$ 取值同 (7).

Else 令 $\lambda_k^i = \frac{s_{k-1}^T y_{k-1}}{s_{k-1}^T s_{k-1}}, i = 1, \dots, n$.

End if

Step 2.

If $\lambda_k^i \leq \varepsilon$ 或者 $\lambda_k^i \geq 1/\varepsilon$ then

令 $\lambda_k^i = \delta, i = 1, \dots, n$.

Step 3. 令 $t = 1$

Step 4.

If $f(x_k + tz_k) \leq \max_{0 \leq j \leq \min(k, M)} f(x_{k-j}) + \gamma t g_k^T z_k$ then

令 $t_k = t, x_{k+1} = x_k + t_k z_k$, 跳转至 Step 4.

Else 取 $t_{\text{new}} \in [\sigma_1 t, \sigma_2 t]$, 令 $t = t_{\text{new}}$, 跳转至 Step 3.

Step 5. 令 $k = k + 1$.

End while

混合谱梯度算法每步迭代利用了两个梯度信息, 具有一定的拟牛顿性质, 数值实验结果表明优化效果优于谱梯度算法和多元谱梯度算法, 它的全局收敛性由定理 2 给出。

定理 2 假设 $\Omega = \{x: f(x) < f(x_0)\}$ 为有界集, 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 在 Ω 的某邻域内连续可微。对任何给定的初始值 x_0 和 $\varepsilon > 0$, 混合谱梯度算法或有限终止, 或 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0$

或 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = -\infty$

证明 文献 [2] 给出了谱梯度方法全局收敛性的证明, 这里只需要证明多元谱梯度方法的全局收敛性。

由 z_k 的定义可知, 存在正数 c_1, c_2 , 使得 $g_k^T z_k \leq -c_1 \|g_k\|_2^2, \|z_k\|_2 \leq c_2 \|g_k\|_2$ 。事实上, 由多元谱梯度方法可得

$$\begin{aligned} g_k^T z_k &= -g_k^T \text{diag}\{1/\lambda_k^1, 1/\lambda_k^2, \dots, 1/\lambda_k^n\} g_k \leq \\ &= -\varepsilon \|g_k\|_2^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \|z_k\|_2 &= \|\text{diag}\{1/\lambda_k^1, 1/\lambda_k^2, \dots, 1/\lambda_k^n\} g_k\|_2 \leq \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \|g_k\|_2 \end{aligned} \quad (9)$$

因此, 多元谱梯度方法满足文献 [11] 中收敛性定理的全部假设, 故具有全局收敛性。

2 在医学图像弹性配准中的应用

考虑混合谱梯度方法在 B 样条弹性形变模型中的应用, 以灰度差平方和为匹配测度进行实验。

2.1 B 样条弹性形变模型

B 样条弹性形变函数

$$\varphi(x) = x + \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} C_j \beta_m(x/h - j) \quad (10)$$

其中 $\{C_j\}$ 为控制点, $x \in \mathbb{R}^n, \beta_m$ 为 B 样条基函数。当 $n = 3$ 时表示是三维图像间的弹性形变, $n = 2$ 时表示二维情形, 此时的 $\varphi(x)$ 又可以写为:

$$\varphi(x, y) = (x, y) + \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 B_k(s) B_l(t) C_{(i+k)(j+l)} \quad (11)$$

其中 $i = \lfloor \frac{x}{h_1} \rfloor - 1, j = \lfloor \frac{y}{h_2} \rfloor - 1, s = x - [x], t = y -$

$[y]$, B_k 和 B_l 是均匀三次 B 样条基函数, 定义如下:

$$\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^3/6 \\ B_1(t) &= (3t^3 - 6t^2 + 4)/6 \\ B_2(t) &= (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)/6 \\ B_3(t) &= t^3/6 \end{aligned} \quad (12)$$

h_1, h_2 分别代表控制点的距离, 其数值越小, 控制点网格越细密。

2.2 灰度差平方和测度

灰度差平方和测度也称为最小均方误差, 即通过测量两幅图像配准后的最小均方误差来评价配准的效果, 适于单模态图像的配准。如果用 f_r 表示参考图像 R, f_t 表示待配准图像 T, f_t^c 表示待配准图像 T 的连续描述, 则灰度差平方和 (SSD, sum squared differences)

$$E = \frac{1}{\|I\|} \sum_{i \in I} (f_t^c(\phi(i)) - f_r(i))^2 \quad (13)$$

其中, I 表示图像取值区域, $\|I\|$ 表示单幅图像的像素数目。

2.3 实验结果

B 样条弹性形变模型往往利用分层技术, 即先选取较大的 h_1, h_2 , 用粗网格表示变形函数, 优化得到解 $\{C_j\}_1$; 然后将 h_1, h_2 减少, 对 $\{C_j\}_1$ 插入节点得到第二层迭代的初值, 再次优化得到解 $\{C_j\}_2$; 继续减少 h_1, h_2 , 重复上述过程, 得到不同层次的解 $\{C_j\}_3, \{C_j\}_4 \dots$ 。达到停止准则时的解所表示的 B 样条函数就会逼近真正的弹性变形函数。分层技术克服了仅用单层迭代容易陷入局部最优的问题, 但每层的迭代仍然是求解问题 (1), 只要提高每层的迭代速度就可以缩短整个配准过程。为此, 我们采用全局的 B 样条弹性形变模型, 以 (13) 替代目标函数 $f(x)$, 分别用最速下降法、谱梯度方法和混合谱梯度方法求解控制点 $\{C_j\}$ 。三种方法均采用 step 4 中的非单调线搜索策略, 且取共同的常数 $\varepsilon = 10^{-10}, M = 5, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.5$ 及

$$\delta = \begin{cases} 1, & \|g_k\| > 1 \\ \|g_k\|^{-1}, & 10^{-5} \leq \|g_k\| \leq 1 \\ 10^5, & 10^{-5} > \|g_k\| \end{cases} \quad (14)$$

后退准则中 t_{new} 的选取采用二次插值的方法。

实验采用的参考图像是一胸腔 CT 切片, 原有大小是 512×512 , 隔行采样后得到大小为 128×128 的参考图像 R (见图 1)。待配准图像 T 是参考图像 R 在已知变换作用下得到的, 变换采用的 h_1

$= h_2 = 8$ (见图 1)。

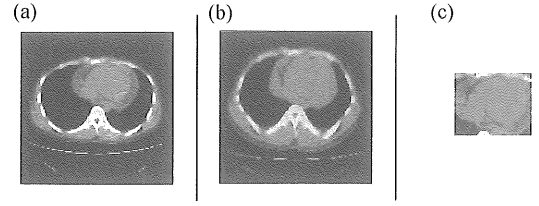


图 1 胸腔 CT 切片

Fig. 1 CT slices of chest

(a) 参考图像; (b) 待配准图像; (c) ROI 区域

考虑到影响图像弹性配准临床应用最主要的因素是速度与精度, 整个配准过程共分了 8 层, 每层迭代 20 步, 运行环境是 Pentium IV/2.4GHz CPU, 代码由 matlab6.5.1 实现。结果显示, 最速下降法实现整个过程的耗时远远多于谱梯度方法和混合谱梯度方法, 而谱梯度方法和混合谱梯度方法的耗时则十分接近, 每层运行时间见表 1。

表 1 CPU 时间

Table 1 CPU time

h_1, h_2	最速下降法	谱梯度方法	混合谱梯度方法
64	450.000	283.782	283.641
32	450.937	282.125	283.828
16	447.547	293.468	288.203
8	416.000	290.188	298.772
4	363.266	285.750	288.359
2	317.812	291.203	294.469
2	445.562	1731.516	1737.272

变形系数

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\|ROI\|} \sum_{i \in ROI} \|\varphi(i) - \varphi^*(i)\|^2}$$

用以评估真正的变形函数 φ^* 与寻找到的变形函数 φ 之间的几何误差, 其中的 ROI 表示感兴趣区域。表 2 和表 3 分别列出了以参考图像 R 和图 1 中的 ROI 区域作为 ROI 区域时, 每层结果的变形系数。对整幅图像而言, 随着 h_1, h_2 的减少, 控制网格的加密, 最速下降法的变形系数反而逐层增加, 偏离真解; 谱梯度方法和混合谱梯度方法的变形系数并没有逐层减少, 而是当 h_1, h_2 取 16 和 8 时有相对较小, 较好地反映了真解所取的 h_1, h_2 为 8。同时, 从第三层开始混合谱梯度方法的变形系数明显比谱梯度方法的小, 这进一步说明了, 混合谱梯度方法在运行时间上稍逊于谱梯度方法, 但计算精度上

又高于谱梯度方法。

表 2 变形系数 (整幅图像)
Table 2 Warping index (whole image)

h_1, h_2	最速下降法	谱梯度方法	混合谱梯度方法
64	9.213 8	8.819 4	8.819 4
32	9.699 1	9.081 2	9.081 2
16	9.880 2	8.891 3	8.731 8
8	10.015 1	8.908 1	8.774 6
4	10.115 7	8.977 9	8.846 1
2	10.145 4	9.010 0	8.887 5

为了进一步说明三种迭代算法的配准效果,图 2 分别给出了每层的配准效果图,从左至右 h_1, h_2 的取值分别为 64、32、16、8、4、2,图中从上至下依

次是最速下降法、谱梯度方法、混合谱梯度方法对应的配准效果图。从图形上可以明显看出,当 h_1, h_2 取 16 和 8 时,两种谱梯度方法配准的效果比其它层次要好,也反映了真解所取的 h_1, h_2 为 8。

表 3 变形系数 (ROI 区域)
Table 3 Warping index (ROI)

h_1, h_2	最速下降法	谱梯度方法	混合谱梯度方法
64	10.404 4	9.511 2	9.511 2
32	10.409 1	9.856 0	9.856 0
16	8.987 4	8.263 9	8.177 1
8	8.734 6	8.032 6	7.952 5
4	8.731 5	7.977 6	7.883 3
2	8.714 0	7.958 1	7.861 8

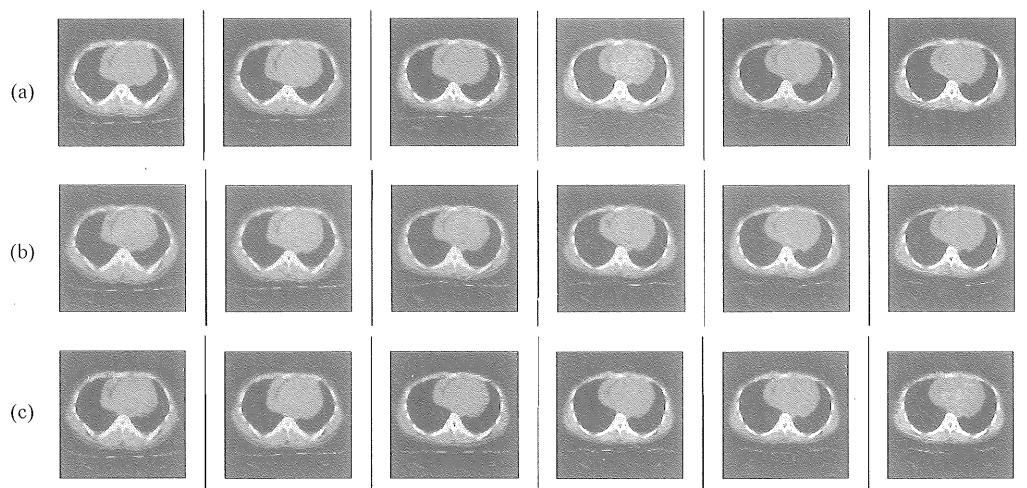


图 2 配准效果图

Fig. 2 Results of registration with three methods

(a) 最速下降法, (b) 谱梯度方法, (c) 混合谱梯度方法

3 结 语

最优化过程在配准过程中具有非常重要的地位,如何提高优化速度,防止陷入局部最优都是有待解决的问题。本文提出的混合谱梯度方法适用于配准参数数目较大时的配准问题,

并且不受配准测度选择的限制,在解决弹性配准问题时,比常用的最速下降法耗时少,收敛快;与谱梯度方法相比较,运行时间上稍慢一些,但变形系数反映的结果反而要好一些。所以,混合谱梯度方法不失为一个有效的算法。

在实验过程中,我们还注意到,每步迭代中梯度的计算是最耗时的,尤其是对大图像,只要能减

少梯度计算的时间,一定可以大大缩减配准的过程。而配准的精度,仍然依赖于配准测度和优化算法。

参考文献:

- [1] HAN L, YU G H, GUAN L T. Multivariate spectral gradient method for unconstrained optimization [J]. Appl Math Comput, 2008, 201(1-2): 621-630.
- [2] RAYDAN M. The Barzilai and Borwein gradient method for the large scale unconstrained minimization problem [J]. SIAM J Optim, 1997, 7: 26-33.
- [3] MODERSITZKI J. Numerical Methods for Image Registration (Numerical Mathematics and Scientific Computation) [M]. New York: Oxford Univ. Press, 2004.

(下转第 21 页)

- 通用规范[S]. 北京:人民交通出版社, 2004.
- JTG D60 - 2004. General Code for Design of Highway Bridges and Culverts[S]. 2004.
- [4] 中华人民共和国建设部. GB50216 - 94. 铁路工程结构可靠度设计统一标准[S]. 北京:中国计划出版社, 1994.
- GB 50216 - 1994 Unified design standard for reliability of railway engineering structures[S]. 1994.
- [5] 交通部公路规划设计院. GB/T 50283 - 1999 公路工程施工结构可靠度设计统一标准[S]. 北京:中国计划出版社, 1999.
- GB/T 50283 - 1999 Unified standard for reliability design of highway engineering structures[S]. 1999.
- [6] 铁道部. TB10002. 2—2005 铁路桥梁钢结构设计规范[S]. 北京:中国铁道出版社, 2005.
- TB10002. 2—2005. Code for the Designs of the Steel Structures in the Railway Bridges[S]. 2005.
- [7] 铁道部. TB10002. 1 - 2005 铁路桥涵设计基本规范[S]. 北京:中国铁道出版社, 2005.
- TB10002. 1 - 2005. Basic code for the designs of the railway bridges and culverts[S]. 2005.

~~~~~  
(上接第12页)

- [4] GOSHTASBY A. 2 - D and 3 - D Image Registration: For Medical, Remote Sensing, and Industrial Applications [M]. New York: Wiley-Interscience ch. 5, Transformation Functions, 2005.
- [5] RUECKERT D, SONODA L I, HAYES C, et al. Nonrigid registration using free-form deformations: application to breast MR images [J]. IEEE Trans, on Medical Imaging, 1999, 18(8): 712 - 721.
- [6] KYBIC J. Fast parametric elastic image registration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(11): 1427 - 1442.
- [7] 彭晓明, 陈武凡, 马茜. 基于 B 样条的快速弹性图像配准方法 [J]. 计算机工程与应用, 2006, 11: 186 - 189.
- PENG Xiaoming, CHEN Wufan, MA Qian. Fast elastic image registration method based on B-splines [J]. Computer Engineering and Applications, 2006, 11: 186 - 189.
- [8] SHI Z J. Convergence of line search methods for unconstrained optimization[J]. Appl Math Comput, 2004, 157: 393 - 405.
- [9] HAGER W W, ZHANG H C. A nonmonotone line search technique and its application to unconstrained optimization [J]. SIAM J Optim, 2004, 14: 1043 - 1056.
- [10] SHI Z J, SHEN J. Convergence of nonmonotone line search method [J]. J Comput and Appl Math, 2006, 193: 397 - 412.
- [11] GRIPPO L, LAMPARIELLO F, LICIDI S. A nonmonotone line search technique for Newton's method [J]. SIAM J Optim, 1986, 7: 26 - 33.